

Άσκηση

Να βρείτε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

- $f'(x) \cos x + f(x) \sin x = f(x) \cos x$
- $f(0) = 2007$

Λύση

$$f'(x) \cos x - f(x)(\cos x)' = f(x) \cos x$$

Διαιρώ με το $(\cos x)^2$

$$\frac{f'(x) \cos x - f(x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{f(x) \cos x}{(\cos x)^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{\cos x} \right)' = \frac{f(x)}{\cos x}$$

Ξέρουμε ότι αν $f'(x) = f(x)$ τότε $f(x) = ce^x$ με $c = \text{σταθερά}$

Άρα έχουμε

$$\frac{f(x)}{\cos x} = e^x$$

$$f(x) = ce^x \cos x$$

Για $x=0$ έχουμε

$$2007 = ce^0$$

Αρά τελικά έχουμε

$$2007 = c$$

$$f(x) = 2007e^x \cos x$$